

# Grenzschichtmodellierung

## v1.1

Dipl.-Ing.(FH) Kapt.(AG) Wolf Scheuermann

Hamburg, 2016

### Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Grenzschichtmodellierung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Sinus-Substitutionsfunktionen</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Stromlinienberechnung</b>	<b>7</b>
4.1	Numerische, iterative Lösung . . . . .	7
4.2	Geschlossene Lösung . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Programme</b>	<b>11</b>
5.1	Numerische Lösung . . . . .	11
5.2	Geschlossene Lösung . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Quellen</b>	<b>18</b>

# 1 Einleitung

In der **Potentialtheorie** der Fluidströmung [1] liegt die **Stagnationslinie**, also die Stromlinie, welche senkrecht auf der Profilvorderkante auftrifft bzw. sich von der Hinterkante des Profils entsprechend der Kutta-Bedingung ablöst, an der Form des Flügelprofils an. Die Stagnationslinie spaltet sich gewissermaßen auf und bildet die **Profilform** ab.

Der Wert der Stromlinienfunktion der Stagnationslinie ist keineswegs Null, was eine Geschwindigkeitskomponente tangential zur Profiloberfläche bedeutet, was nur bei **nichtviskosen, inkompressiblen Fluiden** der Fall ist. In der Realität haben wir es immer mit **viskosen Fluiden** zu tun, was bedeutet, daß das Fluid an Oberflächen haftet, also Geschwindigkeit Null hat. Die Übergangszone von der an der Profiloberfläche bewegungslos "klebenden" Luft zur freien Umströmung wird **Grenzschicht** genannt.

Die **Modellierung** eines angeströmten rotierenden Zylinders ist mittels der Potentialtheorie möglich, wobei eine **geschlossene Lösung** der Stromlinienfunktion zur Berechnung der Stromlinien gefunden werden kann [1]:

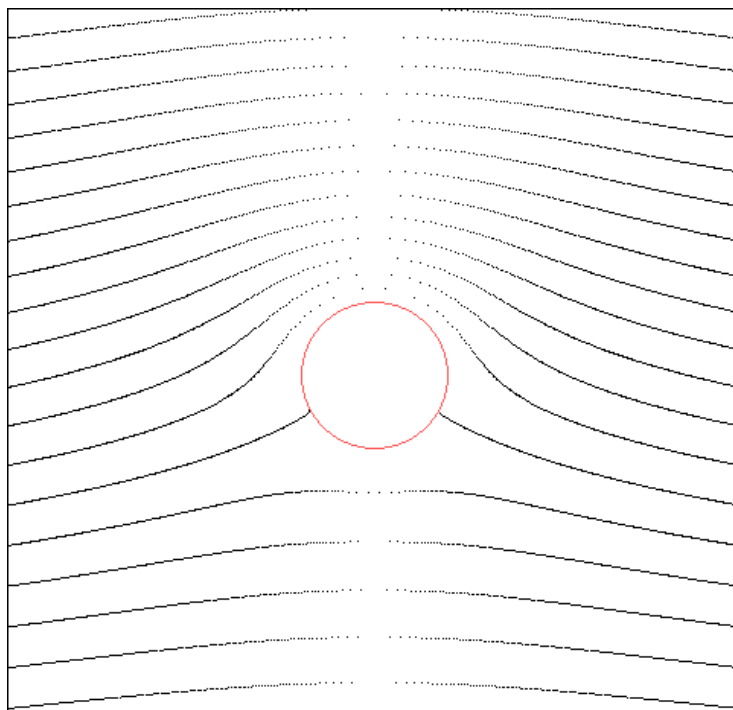
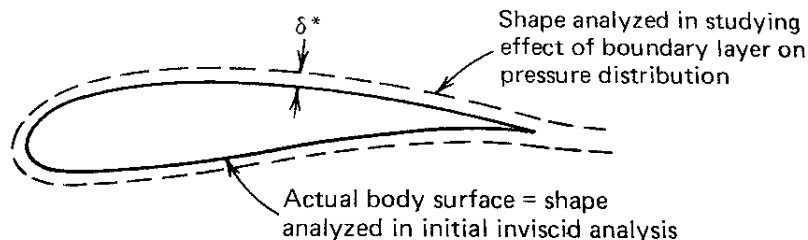


Figure 1: Stromlinien um rotierenden, angeströmten Zylinder

Die Potentialtheorie modelliert die Realität nur zu etwa 80%. **Erstes Ziel** dieser Arbeit ist es, innerhalb der Potentialtheorie eine einfache Erweiterung zu finden, die die **Realitätstreue** des Modells auf 90% oder mehr für viskose, nichtkompressible Fluide steigert. Das **zweite Ziel** ist es, eine **geschlossene Lösung** dieses Modells zu finden.

Das Studium der Grenzschicht in der Aerodynamik legt nahe, ihren Verdrängungseffekt als **Veränderung** der Profilform darzustellen. Hier wirkt sich die **Ablösung** der Grenzschicht so aus, daß das Profil keine geschlossene Kurve mehr bildet, sondern offen in der Abströmung ist [2].



**FIG. 7.5.** Analysis of displacement effect by altering the body surface shape.

Figure 2: Grenzschichteffekt nach [2]

Im Sinne der Potentialströmung kann dies durch eine Quelle in der Parallelströmung modelliert werden, was einen sogenannten **Halbkörper** ergibt. Zusammen mit den Stromfunktionen eines rotierenden Zylinders ergibt sich ein brauchbares **Modell viskoser Strömung**, das die Realität zu etwa 95% abbildet. Eine 100%ige Modellierung ist nicht möglich, da mittels dieser Methode prinzipiell immer nur der **laminare** Anteil der Umströmung dargestellt werden kann, wogegen der **turbulente** Anteil nur summarisch eingegrenzt wird.

Durch die Abbildung der Stromlinien des umströmten Zylinders mittels **meromorpher Funktionen** in die komplexe Ebene kann das **Stromlinienbild** jedes beliebigen Profils erzeugt werden [3].

## 2 Grenzschichtmodellierung

Um das eingangs skizzierte **Grenzschichtmodell** zu realisieren sind folgende **Elemente der Potentialströmungstheorie in Polarkoordinatendarstellung** als Funktion von  $(r, \alpha)$  nötig:

Parallelströmung:  $\psi_1 = u_\infty \cdot r \cdot \sin(\alpha)$

Dipol:  $\psi_2 = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{r}$

Potentialwirbel:  $\psi_3 = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r)$

Quelle:  $\psi_4 = \frac{E}{2\pi} \alpha$

Dabei bedeutet:

$\Gamma$  Zirkulation

$\psi = f(r, \alpha)$  Stromfunktion

$u_\infty$  Anströmgeschwindigkeit

$M = 2\pi \cdot u_\infty \cdot d^2$  Dipolmoment

$d$  Zylinderdurchmesser

$E$  Quellenstärke

Die Berechnung der **Stromlinien** des Grenzschichtmodells eines **umströmten rotierenden Zylinders** läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
 \text{Stromlinie} &= \underbrace{\text{Parallelströmung} + \text{Dipol}}_{\text{Zylinder} + \text{Wirbel}} \\
 &= \underbrace{\text{rotierender Zylinder} + \text{Quelle}}_{\text{rotierender Zylinder mit Grenzschicht}}
 \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\psi = ((\psi_1 + \psi_2) + \psi_3) + \psi_4$$

bzw.

$$\psi = u_\infty \cdot r \cdot \sin(\alpha) - \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) + \frac{E}{2\pi} \alpha \quad (1)$$

Wenn für eine bestimmte Stromlinie  $\psi$  und  $r$  vorgegeben ist, sowie  $u_\infty$ ,  $\Gamma$ ,  $d$ , und  $E$ , so können wir schreiben:

$$2\pi r \psi - \Gamma r \ln(r) = (2\pi r^2 u_\infty - M) \sin(\alpha) + E r \cdot \alpha$$

oder

$$x = y \cdot \sin(\alpha) + z \cdot \alpha \quad (2)$$

mit

$$x := 2\pi r \psi - \Gamma r \ln(r)$$

$$y := 2\pi r^2 u_\infty - M$$

$$z := E r$$

Gleichung (2) ist eine **transzendente Gleichung** für  $\alpha$  in Abhängigkeit von  $r$ , für die es keine analytische, geschlossene Lösung gibt. Mathematische **Tricks**, wie die Ableitung der Gleichung und die Integration der Lösung funktioniert wegen der periodischen Funktionen auch nicht.

Einzigste Möglichkeit, sich einer geschlossenen Lösung zu nähern ist die **Substitution** der Sinus-Funktion durch eine **Polynomfunktion**, gegebenenfalls mit Einschränkung auf ein Intervall, z.B.  $[-\pi, +\pi]$  oder  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ , welche es erlaubt, Gleichung (2) geschlossen zu lösen.

### 3 Sinus-Substitutionsfunktionen

Der erste Ansatz ist sicher die **Reihenentwicklung** des Sinus in ein **Taylor-Polynom**:

$$\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} \dots$$

Wie folgendes Diagramm zeigt, ist die Entwicklung bis zur fünften Potenz ausreichend, um den Sinus im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  genau darzustellen - leider aber ebenfalls nicht mehr lösbar.

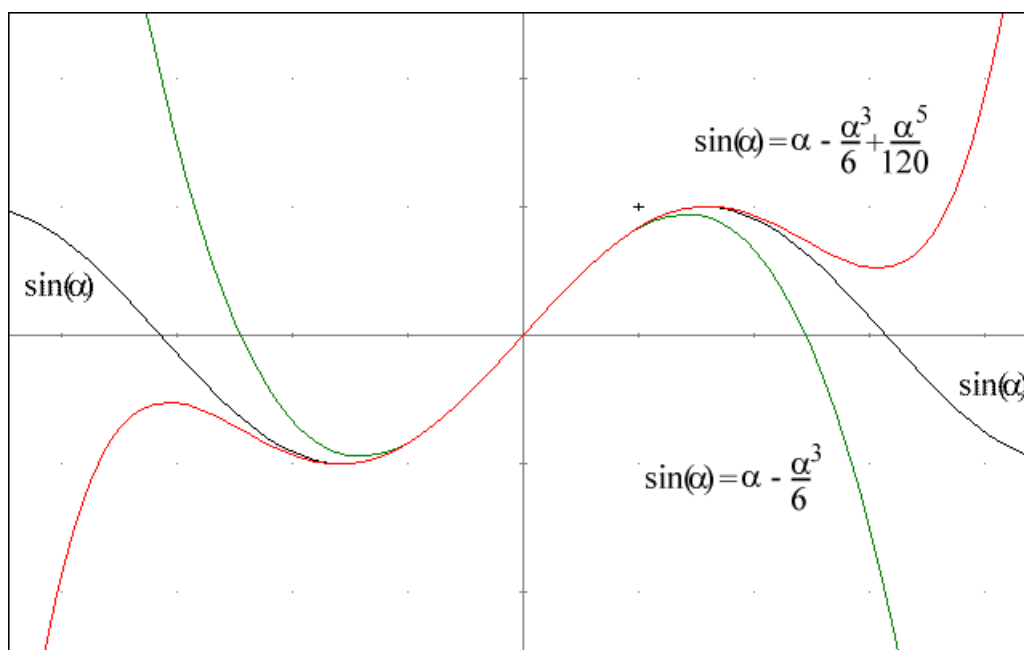


Figure 3: Taylor-Reihenentwicklung des Sinus

Es wird eine Ersatzfunktion des **Cosinus** verwendet, von der die Substitutionsfunktion des **Sinus** abgeleitet wird. Als **Eckpunkte** dienen  $\cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos(+\frac{\pi}{2}) = 0$  sowie  $\cos(0) = 1$  um die **Parabel**  $\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{a}$  zu bestimmen, wo  $a = \frac{\pi^2}{4}$  ist. Wegen  $\sin(\alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  ergibt sich für positive  $\alpha$ :

$$\sin(\alpha) = \frac{4\alpha(\pi-\alpha)}{\pi^2} \text{ für } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

und für negative  $\alpha$ :

$$\sin(\alpha) = \frac{4\alpha(\pi+\alpha)}{\pi^2} \text{ für } -\pi \leq \alpha \leq 0$$

Das folgende Diagramm zeigt den Sinus und die **Substitutionsparabeln**. Die nicht hundertprozentige Übereinstimmung schmälert wiederum die **Genauigkeit** auch einer geschlossenen Lösung, weswegen wir die Realitätstreue des hier dargestellten Modells auf lediglich ca. 90% schätzen.

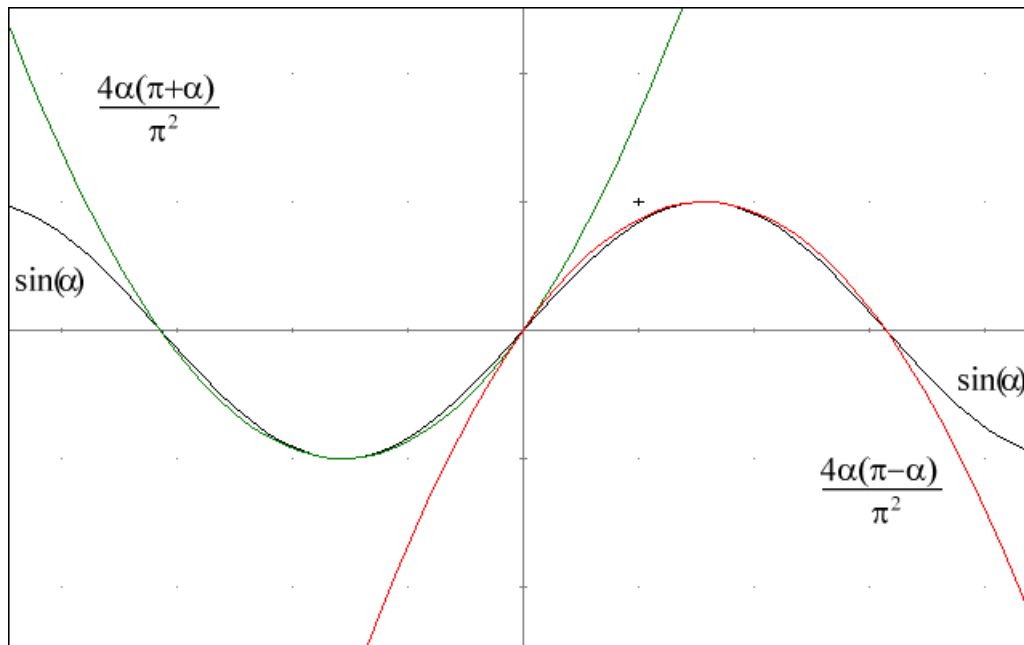


Figure 4: Parabolische Ersatzfunktion des Sinus

## 4 Stromlinienberechnung

Die **numerische Lösung** auch transzendenter Gleichungen ist relativ leicht. Sozusagen in einem **digitalen Windkanal** wird hier das Stromlinienbild erzeugt, das durch Gleichung (1) determiniert ist. Das numerische Verfahren ist ziemlich **einfach** gestrickt und kostet daher einiges an Rechenzeit.

### 4.1 Numerische, iterative Lösung

Das Stromlinienbild gemäß der Gleichung (1) läßt den Verlauf der Stromlinien entsprechend des potentialtheoretischen Grenzschichtmodells erkennen.

Die Schnittebene wird linienweise gescannt und der Wert der **Stromlinienfunktion** berechnet. Wenn dieser Wert dicht in der Nähe eines ganzzahligen Wertes liegt, wird der Punkt markiert. In der Gesamtschau läßt sich dann der Verlauf der jeweiligen Stromlinie erkennen.

Die Stromlinie ist aber nicht separat für sich alleine berechenbar. Dafür ist eine geschlossene Lösung der Gleichung (1) notwendig.

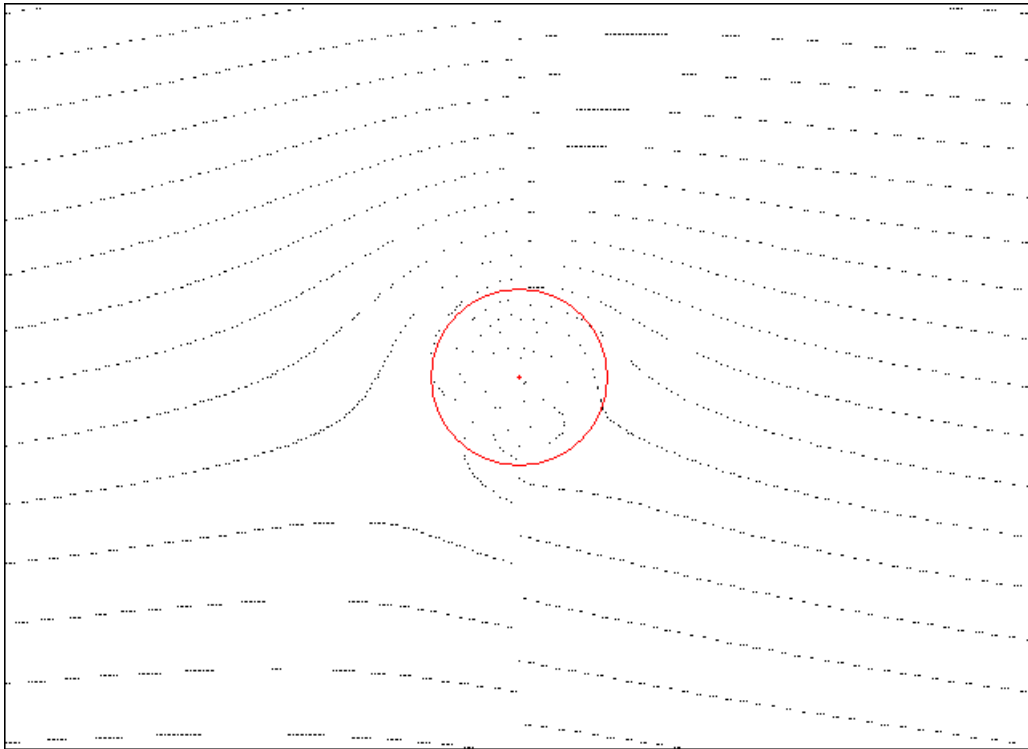


Figure 5: Grenzschichtmodell numerisch

Eine Lösung ist im vorherigen Bild dargestellt. Das entsprechende Programm ist im letzten Kapitel zu finden. Es enthält noch einen Programmierfehler, was sich am Bruch der Stromlinien zwischen den beiden Bildhälften bemerkbar macht.

## 4.2 Geschlossene Lösung

Eine geschlossene Lösung der Gleichung (2) kann approximiert werden, wenn die Substitutionsfunktionen des Sinus in die Gleichung eingesetzt werden. Allerdings ist eine Reihe von **Fallunterscheidungen** zu treffen.

Zum einen muß im jeweiligen **Winkelintervall** die entsprechende Ersatzfunktion eingesetzt werden und es ergeben sich quadratische Gleichungen, wobei nur **reelle** Lösungen verwendbar sind. Beispielhaft soll die Lösung am Beispiel der Substitutionsfunktion

$$\sin(\alpha) = \frac{4\alpha \cdot (\pi + \alpha)}{\pi^2}$$



für das Intervall  $[\frac{\pi}{2}, 0]$  berechnet werden. Gleichung (2) wird damit zur quadratischen Gleichung für  $\alpha$ :

$$x = y \cdot \frac{4\alpha \cdot (\pi + \alpha)}{\pi^2} + z\alpha$$

Bei gegebenen Konstanten und vorgegebenem  $r$  berechnet sich der zugehörige Winkel  $\alpha$  des Punktes  $(r, \alpha)$  der Stromlinie zu:

$$\alpha = \frac{\pi \cdot (\sqrt{\pi^2 z^2 + 8\pi y z + 16xy + 16y^2} - \pi z - 4y)}{8y}$$

und die zweite Lösung ist:

$$\alpha = -\frac{\pi \cdot (\sqrt{\pi^2 z^2 + 8\pi y z + 16xy + 16y^2} + \pi z + 4y)}{8y}$$

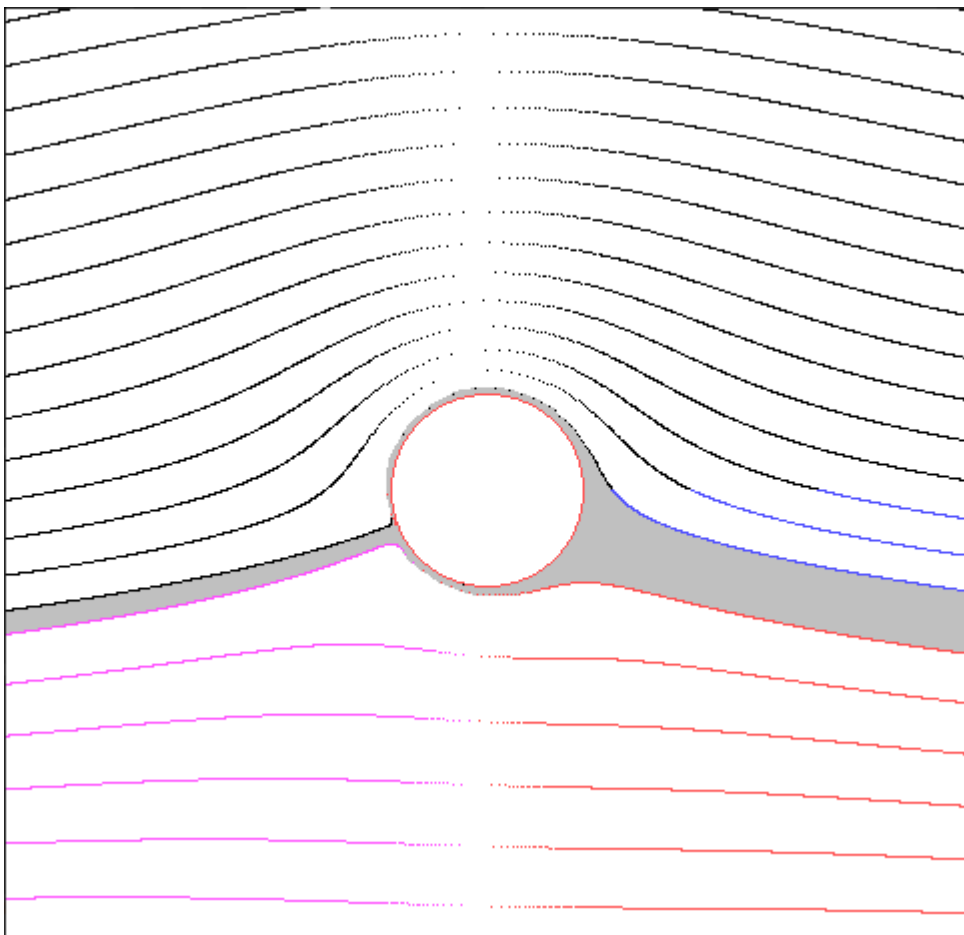


Figure 6: Grenzschichtmodell geschlossen gelöst

Das vorhergehende Bild zeigt den Stromlinienverlauf entsprechend dem potentialtheoretischen Grenzschichtmodell, jedoch in geschlossener Lösung. Sichtbar ist, daß die Stromlinien nahe der **Stagnationslinie** der Anströmseite links auf der Abströmseite infolge der **Ablösung** der Grenzschicht rechts **aufgeweitet** sind.

Das Bild entspricht weitgehend der numerischen Lösung und die Ungenauigkeit der Sinus-Substitutionsfunktion ist kaum sichtbar.

Allerdings ist der Zusammenhang von **Grenzschichtdicke** und **Quellenstärke** bisher nur heuristisch und nicht theoretisch bestimmt. Hier ist also noch theoretische Arbeit notwendig.

## 5 Programme

Die folgenden *QBasic<sup>TM</sup>*-Programme wurden verwendet, um die Stromlinien-Bilder zu berechnen.

### 5.1 Numerische Lösung

Für die numerische Lösung der Potentialtheoretischen Gleichungen wurde das nachfolgende Programm verwendet.

```
'WNDKANA1.BAS Digitaler Windkanal. W.-W.Scheuermann, 1994-2006-2016
'NACA4313
' DATA 23
,
, x, y, Slope of airfoil Yoben Yunten
' DATA -5 , 0 , 1.62641 , 0 , 0
' DATA -4.545455 , .1120294 , .5285337 , .4816681 , -.2576094
' DATA -4.090909 , .2056933 , .3208006 , .6954533 , -.2840667
' DATA -3.636364 , .2809917 , .2010664 , .843661 , -.2816775
' DATA -3.181818 , .3379247 , .1174717 , .9462909 , -.2704415
' DATA -2.727273 , .3764922 , 5.383918E-02, 1.011557 , -.2585721
' DATA -2.272727 , .3966942 , 3.084183E-03, 1.043995 , -.2506063
' DATA -1.818182 , .3997301 , -3.855123E-02, 1.047732 , -.2482713
' DATA -1.363636 , .3966942 , -.0733406 , 1.035934 , -.2425456
' DATA -.909091 , .390285 , -.102804 , 1.012856 , -.2322864
' DATA -.4545455 , .3805026 , -.1280403 , .9797095 , -.2187043
' DATA 0 , .3673469 , -.1498981 , .9374538 , -.2027599
' DATA .4545455 , .350818 , -.1690683 , .8868572 , -.1852211
' DATA .909091 , .3309158 , -.1861366 , .8285303 , -.1666987
' DATA 1.363636 , .3076404 , -.2016183 , .7629511 , -.1476703
' DATA 1.818182 , .2809917 , -.2159785 , .6904801 , -.1284966
' DATA 2.272727 , .2509698 , -.2296456 , .6113721 , -.1094325
' DATA 2.727273 , .2175746 , -.2430217 , .5257848 , -.9.063555E-02
' DATA 3.181818 , .1808062 , -.2564892 , .4337842 , -.7.217175E-02
' DATA 3.636363 , .1406646 , -.2704144 , .3353496 , -.5.402038E-02
' DATA 4.090908 , 9.714971E-02, -.2851517 , .2303769 , -.3.607745E-02
' DATA 4.545453 , 5.026158E-02, -.3010466 , .1186815 , -.1.815836E-02
' DATA 4.999998 , 2.179827E-07, -.3184366 , 4.646827E-07, -.2.871734E-08
' DATA 5.454543 , -5.363439E-02, -.3376532 , -.1260061 , 1.873732E-02
'NACA0010
' DATA 26
,
, x, y, Slope of airfoil, yoben yunten
' DATA -5 , 0 , 1.251085 , 0 , 0
' DATA -4.777778 , 0 , .676361 , .2064383 , -.2064383
' DATA -4.545455 , 0 , .4065644 , .2843375 , -.2843375
' DATA -4.090909 , 0 , .2467698 , .3767385 , -.3767385
' DATA -3.636364 , 0 , .1546665 , .4328226 , -.4328226
' DATA -3.181818 , 0 , 9.036288E-02, .467974 , -.467974
' DATA -2.727273 , 0 , 4.141472E-02, .4885111 , -.4885111
' DATA -2.272727 , 0 , 2.372408E-03, .4979235 , -.4979235
' DATA -1.818182 , 0 , -2.965484E-02, .4984627 , -.4984627
' DATA -1.363636 , 0 , -5.641589E-02, .4917229 , -.4917229
' DATA -.909091 , 0 , -7.908005E-02, .4789011 , -.4789011
' DATA -.4545455 , 0 , -9.849243E-02, .4609284 , -.4609284
' DATA 0 , 0 , -.1153063 , .4385438 , -.4385438
' DATA 0 , 0 , -.1153063 , .4385438 , -.4385438
' DATA .4545455 , 0 , -.1300525 , .4123378 , -.4123378
' DATA .909091 , 0 , -.143182 , .3827804 , -.3827804
' DATA 1.363636 , 0 , -.1550911 , .350239 , -.350239
' DATA 1.818182 , 0 , -.1661373 , .3149911 , -.3149911
' DATA 2.272727 , 0 , -.1766504 , .2772326 , -.2772326
' DATA 2.727273 , 0 , -.1869398 , .2370848 , -.2370848
' DATA 3.181818 , 0 , -.1972994 , .1945984 , -.1945984
' DATA 3.636363 , 0 , -.208011 , .1497577 , -.1497577
' DATA 4.090908 , 0 , -.2193475 , .1024824 , -.1024824
' DATA 4.545453 , 0 , -.2315744 , 5.263073E-02, -.5.263073E-02
' DATA 4.777781 , 0 , -.2348352 , 2.609231E-02, -.2.609231E-02
' DATA 5 , 0 , -.2449512 , 0 , 0
'v.Mises Nullmomentenprofil optimal
```

```

' DATA 51
'   x           y           Slope of airfoil   yoben   yunten
' DATA 5      ,0.03665,      -0.2507374,      0.058,  0.0153
' DATA 4.1491 ,0.0289 ,      -1.998051 ,      0.058 , -0.0002
' DATA 3.7569 ,0.06205,      -2.230553,      0.1389 , -0.0148
' DATA 3.4196 ,0.0859 ,      -2.343152,      0.2151 , -0.0433
' DATA 3.1135 ,0.103349995,    -2.384247,      0.2872 , -8.05E-02
' DATA 2.8287 ,0.1158 ,      -2.393534 ,      0.3553 , -0.1237
' DATA 2.5599 ,0.12465 ,      -2.378379,      0.4195 , -0.1702
' DATA 2.3038 ,0.13125,      -2.338719,      0.4801 , -0.2176
' DATA 2.0582 ,0.1598 ,      -2.278055 ,      0.5372 , -0.2176
' DATA 1.8214 ,0.1635 ,      -2.21645 ,      0.5908 , -0.2638
' DATA 1.5923 ,0.16715,      -2.132029,      0.6412 , -0.3069
' DATA 1.3698 ,0.1714 ,      -2.055044 ,      0.6883 , -0.3455
' DATA 1.1532 ,0.1768 ,      -1.956724 ,      0.7323 , -0.3787
' DATA .9419 ,0.1837 ,      -1.857557 ,      0.7732 , -0.4058
' DATA .7353002, 0.19235 ,      -1.761805 ,      0.8111 , -0.4264
' DATA .5330998, 0.20285 ,      -1.648242 ,      0.8462 , -0.4405
' DATA .3349 , 0.215 ,      -1.535321 ,      0.8783 , -0.4483
' DATA .1403999, 0.2287 ,      -1.416668,      0.9077 , -0.4503
' DATA -5.080014E-02, 0.24355 ,      -1.302971,      0.9342 , -0.4471
' DATA -.2388 ,0.25935,      -1.173299,      0.9581 , -0.4394
' DATA -.4238999 ,0.2756,      -1.038254,      0.9792 , -0.428
' DATA -.6062001, 0.2919,      -0.9101 ,      0.9976 , -0.4138
' DATA -.7859001, 0.30785 ,      -0.7761474,      1.0134 , -0.3977
' DATA -.9630999, 0.3231,      -0.6264324,      1.0265 , -0.3803
' DATA -1.1381 ,0.3372 ,      -0.4965362 ,      1.0369 , -0.3625
' DATA -1.3108 ,0.34995,      -0.3391683,      1.0448 , -0.3449
' DATA -1.4814 ,0.36085,      -0.1893523,      1.0499 , -0.3282
' DATA -1.6499 ,0.36975,      -3.59E-02,      1.0524 , -0.3129
' DATA -1.8165 ,0.3765 ,      0.1330042 ,      1.0523 , -0.2993
' DATA -1.9813 ,0.38075,      0.3059908,      1.0494 , -0.2879
' DATA -2.1442 ,0.3825 ,      0.4826645 ,      1.0438 , -0.2788
' DATA -2.3054 ,0.38155,      0.6625068,      1.0354 , -0.2723
' DATA -2.4649 ,0.37795,      0.8470191,      1.0242 , -0.2683
' DATA -2.6227 ,0.3716 ,      1.03581 ,      .01 , -0.2668
' DATA -2.7788 ,0.3626 ,      1.253229 ,      0.993 , -0.2678
' DATA -2.9332 ,0.35085,      1.460236 ,      0.9728 , -0.2711
' DATA -3.0861 ,0.3365 ,      1.701847 ,      0.9495 , -0.2765
' DATA -3.2373 ,0.3196 ,      1.946666 ,      0.9229 , -0.2837
' DATA -3.3868 ,0.3003 ,      2.213229 ,      0.8928 , -0.2922
' DATA -3.5346 ,0.27865,      2.510233,      0.8591 , -0.3018
' DATA -3.6807 ,0.25485,      2.821579,      0.8214 , -0.3117
' DATA -3.8249 ,0.229 ,      3.183734 ,      0.7796 , -0.3216
' DATA -3.9671 ,0.20130005,    3.575508,      0.7331001, -0.3305
' DATA -4.107 ,0.172 ,      4.037626 ,      0.6816 , -0.3376
' DATA -4.2445 ,0.14125,      4.593792,      0.6242 , -0.3417
' DATA -4.3791 ,0.10955,      5.311083,      0.5601 , -0.341
' DATA -4.5099 ,0.07745,      6.279433,      0.4878 , -0.3329
' DATA -4.6359 ,0.0461 ,      7.748348 ,      0.4048 , -0.3126
' DATA -4.7544 ,0.0191 ,      10.54845 ,      0.3066 , -0.2684
' DATA -4.8586 ,0.04845,      21.45038,      0.1818 , -0.0849
' DATA -4.8746 ,0.04845,      -14.28562,      0.1818 , -0.0849
DECLARE FUNCTION Schiff (x, y)
DECLARE FUNCTION Profil (x, y)
DECLARE FUNCTION Profil1 (x, y)
DECLARE FUNCTION Schub (x, y)
DECLARE FUNCTION Parallelstroemung (c, x, y, alfa)
DECLARE FUNCTION Winkelstroemung (C0, theta, x, y)
DECLARE FUNCTION Dipol (M, x, x0, y, y0)
DECLARE FUNCTION Wirbel (g, x, x0, y, y0)
DECLARE FUNCTION Quelle (E, x, x0, y, y0)
DECLARE FUNCTION Senke (E, x, x0, y, y0)
DECLARE FUNCTION RotierenderZylinder (x, y, x0, y0)
DECLARE FUNCTION Zylinder (x, y, x0, y0)
DECLARE FUNCTION Profil2 (x, y)
DECLARE SUB BEGIN ()
DECLARE SUB Bildschirm ()
DECLARE SUB Zeichnen ()
DECLARE SUB drehen (beta, x, y)
DECLARE SUB Profilmriss ()
DIM SHARED n AS INTEGER

```

```

DIM SHARED c AS SINGLE
DIM SHARED r(200) AS SINGLE
DIM SHARED x0(200) AS SINGLE
DIM SHARED yc(200) AS SINGLE
DIM SHARED yoben(200) AS SINGLE
DIM SHARED yunten(200) AS SINGLE
CONST PI = 3.141529654#
CONST DEG = PI / 180
CONST epsilon = .01
CONST schwarz = 0
CONST blau = 1
CONST gruen = 2
CONST tuerkis = 3
CONST dunkelbraun = 4
CONST lila = 5
CONST braun = 6
CONST hellgrau = 7
CONST grau = 8
CONST hellblau = 9
CONST hellgruen = 10
CONST helltuerkis = 11
CONST rot = 12
CONST pink = 13
CONST gelb = 14
CONST weiss = 15
CONST Faktor = 3 / 4
CONST Weite = 10
BEGIN
  Zeichnen
END
SUB BEGIN
  CLS
  SCREEN 12
  VIEW (0, 0)-(639, 479), weiss
  WINDOW (-Weite, -Weite * Faktor)-(Weite, Weite * Faktor)
  READ n
  FOR i = 1 TO n
    READ x0(i), yc(i), r(i), yoben(i), yunten(i)
  NEXT
  c = x0(n) - x0(1)'Profiltiefe
END SUB
FUNCTION Dipol (M, x, x0, y, y0)
  Dipol = -M / (2 * PI) * (y - y0) / ((x - x0) ^ 2 + (y - y0) ^ 2) 'Stromfunktion
  'Dipol = M / (2 * Pi) * (x - x0) / ((x - x0) ^ 2 + (y - y0) ^ 2) 'Potentialfunktion
END FUNCTION
SUB drehen (beta AS SINGLE, x AS SINGLE, y AS SINGLE)
  beta = -beta * DEG
  x = x * COS(beta) + y * SIN(beta)
  y = x * SIN(beta) + y * COS(beta)
END SUB
FUNCTION Parallelstroemung (c, x, y, alfa)
  alfa = alfa * DEG
  Parallelstroemung = c * (y * COS(alfa) - x * SIN(alfa)) 'Stromfunktion
  'Parallelstroemung = c * (x * COS(alfa) + y * SIN(alfa)) 'Potentialfunktion
END FUNCTION
FUNCTION Profil (x, y)
  v = 2
  alfa = 10 * DEG
  Strom = Parallelstroemung(v, x, y, alfa / DEG)
  FOR i = 1 TO n
    IF i > 1 AND i < n THEN
      gamma = 2 * v * alfa * SQR(1 - (x0(i) - x0(1)) / c) / SQR((x0(i) - x0(1)) / c)
    ELSE
      gamma = 0
    END IF
    'symmetrisches Profil mit Anstellwinkel
    Strom = Strom + Quelle(2 * v * r(i), x, x0(i), y, 0) + Wirbel(gamma, x, x0(i), y, 0)
    'symmetrisches Profil mit Anstellwinkel
    'Strom = Strom + Quelle(2 * v * r(i), x, x0(i), y, yc(i)) + Wirbel(gamma, x, x0(i), y, yc(i))
    'symmetrisches Profil
    'Strom = Strom + Quelle(2 * v * r(i), x, x0(i), y, yc(i))
  NEXT
  'Gamma1 = -PI * c * v * (alfa - r(4) * 3 * c / 4)
  'Strom = Strom + Wirbel(Gamma1, x, x0(4), y, yc(4))
  Profil = Strom
END FUNCTION

```

```

FUNCTION Profil1 (x, y)
  Strom = Parallelstroemung(1, x, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(1, x, -4.5, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(1, x, -4, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(1, x, -3.5, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(.7, x, -3, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(.7, x, -2.5, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(.5, x, -2, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(.5, x, -1, y, 0)
  Strom = Strom + Senke(-1, x, 1, y, 0)
  Strom = Strom + Senke(-1, x, 2, y, 0)
  Strom = Strom + Senke(-.7, x, 3, y, 0)
  Strom = Strom + Senke(-.7, x, 4, y, 0)
  Strom = Strom + Senke(-.7, x, 5, y, 0)
  Strom = Strom + Senke(-.5, x, 6, y, 0)
  Profil1 = Strom
END FUNCTION
FUNCTION Profil2 (x, y)
  Strom = Parallelstroemung(1, x, y, 5)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -1.2, y, 0)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -1.1, y, .003)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -1, y, .005)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.9, y, .006)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.8, y, .007)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.7, y, .008)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.6, y, .008)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.5, y, .009)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.4, y, .009)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.3, y, .01)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.2, y, .01)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, -.1, y, .01)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, 0, y, .009)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .1, y, .009)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .2, y, .008)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .3, y, .008)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .4, y, .007)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .5, y, .006)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .6, y, .005)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .7, y, .004)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .8, y, .003)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, .9, y, .002)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, 1, y, .001)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, 1.1, y, 0)
  Strom = Strom + Wirbel(.1, x, 1.2, y, 0)
  Profil2 = Strom
END FUNCTION
SUB Profilumriss
  FOR i = 1 TO n - 1
    LINE (x0(i), yoben(i))-(x0(i + 1), yoben(i + 1)), rot
    LINE (x0(i), yunten(i))-(x0(i + 1), yunten(i + 1)), rot
  NEXT
END SUB
FUNCTION Quelle (E, x, x0, y, y0)
  Quelle = E / (2 * PI) * ATN((y - y0) / (x - x0))
END FUNCTION
FUNCTION RotierenderZylinder (x, y, x0, y0)
  Strom = Parallelstroemung(1, x, y, 0)
  Strom = Strom + Dipol(20, x, 0, y, 0)
  Strom = Strom + Wirbel(10, x, 0, y, 0)
  RotierenderZylinder = Strom
END FUNCTION
FUNCTION Schiff (x, y)
  Strom = Parallelstroemung(1, x, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(.1, x, -2.3, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(.3, x, -1.8, y, 0)
  Strom = Strom + Quelle(1, x, -1.5, y, 0)

```

```

Strom = Strom + Senke(-1, x, 1.5, y, 0)
Strom = Strom + Senke(-.3, x, 1.8, y, 0)
Strom = Strom + Senke(-.1, x, 2.3, y, 0)
Schiff = Strom
END FUNCTION
FUNCTION Schub (x, y)
v0 = 1
v = 1.89 ^ 2 * v0
Schub1 = Parallelstroemung(v0, x, y, 0)
'IF x > 0 AND ABS(y) < 1 THEN
'Schub1 = Schub1 + Parallelstroemung(v - v0, x, y, 0)
'END IF
Schub1 = Schub1 + Quelle(-v, x, 0, y, 0)
Schub = Schub1
END FUNCTION
FUNCTION Senke (E, x, x0, y, y0)
Senke = -E / (2 * PI) * ATN((y - y0) / (x - x0))
END FUNCTION
FUNCTION Winkelstroemung (CO, theta, x, y)
n = PI / (theta * DEG)
Winkelstroemung = CO * (x ^ 2 + y ^ 2) ^ (n / 2) * SIN(n * ATN(y / x))
END FUNCTION
FUNCTION Wirbel (g, x, x0, y, y0)
Wirbel = g / (2 * PI) * LOG(SQR((x - x0) ^ 2 + (y - y0) ^ 2)) 'Stromfunktion
Wirbel = -g / (2 * Pi) * ATN((y - y0) / (x - x0)) 'Potentialfunktion
END FUNCTION
SUB Zeichnen
'Profilumriss
'CIRCLE (0, 0), 1, 12'Einheitskreis
FOR x = -Weite TO Weite STEP .05
FOR y = -Weite * Faktor TO Weite * Faktor STEP .05
'Strom = Schub(x, y)
'Strom = Profil1(x, y)
'Strom = Profil2(x, y)
'Strom = Profil(x, y)
'Strom = Schiff(x, y)
'x1 = -10
'y1 = 0
'x2 = 10
'y2 = 0
'Strom = RotierenderZylinder(x, y, x1, y1) + RotierenderZylinder(x, y, x2, y2)
E = 5
x0 = 0
y0 = 0
x1 = 0
y1 = 0
'Modell für Grenzschicht!
Strom = Quelle(E, x, x0, y, y0) + RotierenderZylinder(x, y, x1, y1)
'Strom = Quelle(E, x, x0, y, y0) + Zylinder(x, y, x1, y1)
'Strom = Parallelstroemung(1, x, y, 0)
'Strom = Strom + Senke(7, x, x0, y, y0)
'Strom = Strom + Quelle(7, x, x0, y, y0)
'Strom = Strom + Wirbel(10, x, 0, y, 0)
FOR Stromlinie = (-2.053) * Weite * 10 TO 2.4 * Weite * 10
IF ABS(Strom - Stromlinie) <= epsilon THEN
PSET (x, y), schwarz
END IF
NEXT
NEXT
NEXT
'Profilumriss
END SUB
FUNCTION Zylinder (x, y, x0, y0)
Strom = Parallelstroemung(1, x, y, 0)
Strom = Strom + Dipol(20, x, 0, y, 0)
Zylinder = Strom
END FUNCTION

```

## 5.2 Geschlossene Lösung

Das folgende Programm ist die geschlossene Lösung des Grenzschichtmodells.

```
'GRENZSCH.BAS      GRENZSCHICHT-BERECHNUNG
'Berechnung der Stromlinien eines Grenzschichtmodells als Quelle aus einem
'rotierenden Zylinder in einer Parallelströmung
'Kapt.Wolf Scheuermann
'5.Apr.2016
DECLARE FUNCTION asin! (x AS SINGLE)      'Arcus Sinus
CLS
SCREEN 12                                'Graphic Display
VIEW (0, 0)-(479, 479), 15
WINDOW (-100, 100)-(-100, -100)
LINE (-100, 100)-(-100, -100), 15, BF
PI = ATN(1) * 4 'Ludolf's Number
RAD = PI / 180 'factor deg -> rad
d1 = .5 'Punktradius
stepp = .7'.1'.7 'radial step
E = 5'10'42'0'100 'source strength
Gamma = 130 'circulation
v = 1 'free stream speed (with fudge factor)
d = 20 'radius of rotating cylinder = 20
M = 2 * PI * v * d ^ 2'Dipolmoment
psi0 = 64.8'67.6'85.45'62'118 'stream function value at stagnation line
psi1 = psi0 + 250'last stream function value
psi2 = psi0 - 100'last value of streamline at the other side
dPsi = 10 'difference in stream function value
'(r,alfa) 'polar coordinate of stream line with value psi = const
'(x0,y0) 'cartesic coordinate of stream line with value psi = const
'psi Stromfunktion
'v Parallelgeschwindigkeit
'r Abstand, r>d
'alfa Winkel
'M Dipolmoment
'd Radius des Zylinders
'Gamma Zirkulation
'pi Kreiszahl
'E Quellenergiebigkeit
'Rotierender Zylinder mit Quelle als Grenzschichtmodell
'=====
'psi=v*r*SIN(alfa)*(1-R^2/r^2)-Gamma/(2*pi)*LOG(r)+E/(2*pi)*alfa
'oder mit den Termen
'x = 2 * pi * r * psi - Gamma * r * LOG(r)
'y = 2 * pi * r ^ 2 * v - M
'z = E * r
'Transzendente Gleichung für alfa:
'x=y*sin(alfa)+z*alfa
'Ersatzfunktion Parabel für SIN(alfa)=4*a*(pi-a)/pi^2 für 0 < alfa <180°
' Parabel für SIN(alfa)=4*a*(pi+a)/pi^2 für -180 < alfa <0°
'Nun ist nur noch folgende quadratische Gleichung zu lösen:
'x=y*(4*a*(pi-a)/pi^2)+z*a bzw.
'x=y*(4*a*(pi+a)/pi^2)+z*a
'Lösungen der Gleichung mit eingesetzten Termen ergibt alfa
CIRCLE (0, 0), d, 12 'draw the cylinder
FOR r = d + stepp TO 7.5 * d STEP stepp 'step through the radial range
'Terme
y = 2 * PI * r ^ 2 * v - M
z = E * r
FOR psi = psi0 TO psi1 STEP dPsi 'streamline at one side
'Term
x = 2 * PI * r * psi - Gamma * r * LOG(r)
'calculate the angle where at the given range psi is found
B = PI ^ 2 * z ^ 2 + 8 * PI * y * z - 16 * x * y + 16 * y ^ 2
IF B < 0 THEN
C = ABS(B)
C = -1
ELSE
C = 1
END IF
```



```

    alfa = C * (-PI * (SQR(B) - PI * z - 4 * y) / (8 * y))
    F = INT(alfa / PI)
    alfa = alfa - F * PI
    x0 = r * COS(alfa)          'transform into cartesian coordinates
    y0 = r * SIN(alfa)
    IF C = 1 AND F = -1 THEN
        CIRCLE (-x0, -y0), d1, 9          'plot the streamline      blau
        PSET (-x0, -y0), 9
    ELSEIF C = 1 AND F < 1 THEN
        CIRCLE (x0, y0), d1, 0          'plot the streamline      schwarz
        PSET (x0, y0), 0
    END IF
    alfa = C * (PI * (SQR(B) + PI * z + 4 * y) / (8 * y))
    F = INT(alfa / PI)
    alfa = alfa - F * PI
    x0 = r * COS(alfa)          'transform into cartesian coordinates
    y0 = r * SIN(alfa)
    IF C = 1 AND F = 1 THEN
        CIRCLE (-x0, -y0), d1, 0          'plot the streamline      schwarz
        PSET (-x0, -y0), 0
    ELSEIF C = 1 AND F < 1 THEN
        CIRCLE (x0, y0), d1, 0          'plot the streamline      schwarz
        PSET (x0, y0), 0
    END IF
NEXT
'=====
FOR psi = psi0 - dPsi TO psi2 STEP -dPsi 'streamline at the other side
    'Term
    x = 2 * PI * r * psi - Gamma * r * LOG(r)
    'calculate the angle where at the given range psi is found
    'note the difference to the above term B!!!
    B = PI ^ 2 * z ^ 2 + 8 * PI * y * z + 16 * x * y + 16 * y ^ 2
    IF B < 0 THEN
        B = ABS(B)
        C = -1
    ELSE
        C = 1
    END IF
    alfa = C * (-PI * (SQR(B) + PI * z + 4 * y) / (8 * y))
    F = INT(alfa / PI)
    alfa = alfa - F * PI
    x0 = r * COS(alfa)          'transform into cartesian coordinates
    y0 = r * SIN(alfa)
    IF C = 1 AND F = -1 AND psi < psi0 * .9 THEN
        CIRCLE (-x0, -y0), d1, 13          'plot the streamline      lila
        PSET (-x0, -y0), 13
    END IF
    alfa = C * (PI * (SQR(B) - PI * z - 4 * y) / (8 * y))
    F = INT(alfa / PI)
    alfa = alfa - F * PI
    x0 = r * COS(alfa)          'transform into cartesian coordinates
    y0 = r * SIN(alfa)
    IF C = 1 AND F = -1 THEN
        CIRCLE (-x0, -y0), d1, 12'0          'plot the streamline      rot
        PSET (-x0, -y0), 12
    ELSEIF C = 1 AND F < 1 THEN
        CIRCLE (x0, y0), d1, 11'0          'plot the streamline      hellblau
        PSET (x0, y0), 11
    END IF
NEXT
NEXT
CIRCLE (0, 0), d, 12          'draw the cylinder again
SLEEP
END          'End of Program
FUNCTION asin (x AS SINGLE) 'Arcus Sinus Function
    asin = ATN(x / SQR(1 - x ^ 2))
END FUNCTION          'End of Function

```

## 6 Quellen

### References

- [1] Ernst Käppeli:  
Aufgabensammlung zur Fluidmechanik.  
Teil 1, Potentialströmungen.  
Verlag Harri Deutsch,  
Thun, Frankfurt am Main  
1992
  
- [2] Jack Moran:  
An Introduction to Theoretical and Computational  
Aerodynamics.  
Dover Publications Inc.,  
Mineola, New York  
1984
  
- [3] Wolf Scheuermann:  
Darstellung von Stromlinien mittels komplex-  
analytischer, konformer (meromorpher) Abbildungen  
Forschungskontor, [www.Forschungskontor.de](http://www.Forschungskontor.de),  
Hamburg  
2009