Nicht-Primzahlformeln

Kapt. Wolf Scheuermann, Hamburg 2009

Einleitung

Wie viele mathematische Laien wollte ich einmal eine (rekursive) Formel zur Berechnung der n-ten Primzahl finden. Wie zu erwarten hatte ich dabei wenig Erfolg. Allerdings fand ich einige Terme, die vielleicht zur Charakterisierung von Nichtprimzahlen benutzt werden können. Eine Berechnung dieser Terme wäre zugleich doch für Primzahltests und Primfaktorzerlegung geeignet.

Annäherung

Sei $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null.

Sei $P \subset \mathbf{N}$ die Menge der Primzahlen.

Sei $Q = \{2n+1 | n \in \mathbf{N}\} = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$ die Menge aller ungeraden Zahlen ohne die Eins unter den natürlichen Zahlen. Q enthält also alle ungeraden Primzahlen aber auch alle sonstigen ungeraden Zahlen, die nicht prim sind. $Q \cap P = P \setminus \{2\} \neq \{\}$.
Diese umständliche Darlegung zusammenfassend:
Eine Zahl $q \in Q$ hat die Form $q = q(n) = 2n+1$ wo $n \in \mathbf{N}$.

Ist $q \in Q$ und $q \notin P$ dann lässt sich q als Produkt mindestens zweier anderer ungerader Zahlen darstellen: $q = q(m) = q(k) \cdot q(l)$ wo $k, l \in \mathbf{N}$ und $q(k), q(l) \in Q$.

Aus der Definition von q ergibt sich m zu: $m = m(k, l) = 2kl + k + l$.

Sei $M = \{m | m = m(k, l), k, l \in \mathbf{N}\}$ die ***Indexmenge der Nichtprimzahlen*** aus Q.

Eine Primzahl p lässt sich somit nicht durch q(m) mit $m \in M$ darstellen: $p \neq q(m(k, l))$.

Gelingt es also eine natürliche Zahl n darzustellen als $n = m(k, l)$, dann ist q(n) nicht prim, sondern hat wenigstens die zwei Faktoren q(k) und q(l), die ihrerseits nicht prim zu sein brauchen.

Findet man diesen ***Nichtprimzahltest***, dann lässt sich durch rekursive Anwendung sofort die Primfaktorzerlegung von q(n) finden. Einen einfachen Test zu finden, ob eine Zahl n von der Form $n = m(k, l)$ ist, ist mir bisher noch nicht gelungen und auch offenbar niemand anderem, dem ich diesen Ansatz bisher gezeigt habe.

Hier einige Eigenschaften von M:

M ist ein kommutativer multiplikativer Verband ohne Eins.
$m(k, l + 1) = m(k, l) + q(l)$
$m(k + 1, l) = m(k, l) + q(k)$
$m(k + 1, l + 1) = m(k, l) + q(k) + q(l)$
$m(k, l) = m(k, k) + l \cdot q(k) = m(l, l) + k \cdot q(l)$

Diese Zusammenhänge zeigen eine eigenartige Verquickung der Indexmenge M mit der von ihr indizierten Menge Q, die sich ggf. für den Nichtprimzahltest evtl. in rekursiver Form nutzen lässt.

M stellt geometrisch eine zweidimensionale verwundene Ebene im dreidimensionalen Raum dar. Vielleicht lässt sich auch damit etwas anfangen.

$m = m(k,l) = 2kl+k+l = k(2l+1)+l = l(2k+1)+k$

Dies bedeutet:
Nur wenn

$$k = (m-l)/(2l+1) \in \mathbf{N}$$

bzw.

$$l = (m-k)/(2k+1) \in \mathbf{N}$$

dann ist q(m) nichtprim.

Andersherum:
Wenn $(m-k)/(2k+1)$ bei einer gegebenen Zahl $m \in \mathbf{N}$ für alle Zahlen $k \in \mathbf{N}$ rational und nichtganz ist, dann ist q(m) eine Primzahl. Für welche Zahlenpaare m und k ist das der Fall, wie hängen diese Zahlen zusammen? Oder noch mal anders: für ein gegebenes $m \in \mathbf{N}$, welche Eigenschaften muß $k \in \mathbf{N}$ haben, damit der Term rational bzw. nichtrational ist?

Zeigen die $m \in M$ besondere Eigenschaften unter Funktionen wie z.B. der L-Funktion?

	l					**m(k,l)**	**= 2 kl**	**+ k**	**+ l**					
k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
1	*4*	*7*	*10*	*13*	*16*	*19*	*22*	*25*	*28*	*31*	*34*	*37*	*40*	*43*
2	*7*	*12*	*17*	*22*	*27*	*32*	*37*	*42*	*47*	*52*	*57*	*62*	*67*	*72*
3	*10*	*17*	*24*	*31*	*38*	*45*	*52*	*59*	*66*	*73*	*80*	*87*	*94*	*101*
4	*13*	*22*	*31*	*40*	*49*	*58*	*67*	*76*	*85*	*94*	*103*	*112*	*121*	*130*
5	*16*	*27*	*38*	*49*	*60*	*71*	*82*	*93*	*104*	*115*	*126*	*137*	*148*	*159*
6	*19*	*32*	*45*	*58*	*71*	*84*	*97*	*110*	*123*	*136*	*149*	*162*	*175*	*188*
7	*22*	*37*	*52*	*67*	*82*	*97*	*112*	*127*	*142*	*157*	*172*	*187*	*202*	*217*
8	*25*	*42*	*59*	*76*	*93*	*110*	*127*	*144*	*161*	*178*	*195*	*212*	*229*	*246*
9	*28*	*47*	*66*	*85*	*104*	*123*	*142*	*161*	*180*	*199*	*218*	*237*	*256*	*275*
10	*31*	*52*	*73*	*94*	*115*	*136*	*157*	*178*	*199*	*220*	*241*	*262*	*283*	*304*
11	*34*	*57*	*80*	*103*	*126*	*149*	*172*	*195*	*218*	*241*	*264*	*287*	*310*	*333*
12	*37*	*62*	*87*	*112*	*137*	*162*	*187*	*212*	*237*	*262*	*287*	*312*	*337*	*362*
13	*40*	*67*	*94*	*121*	*148*	*175*	*202*	*229*	*256*	*283*	*310*	*337*	*364*	*391*
14	*43*	*72*	*101*	*130*	*159*	*188*	*217*	*246*	*275*	*304*	*333*	*362*	*391*	**m(k,l)**

Wenn eine natürliche Zahl $n = m(k,l)$ ist, dann ist das eine Gleichung mit zwei Unbekannten, nämlich k und l. Gibt es eine zweite Gleichung für n und diese Unbekannten? Das ist also die Frage nach weiteren Eigenschaften der Zahlen m(k,l).

Alternative aber äquivalente Darstellungen von m(k,l) sind folgende:

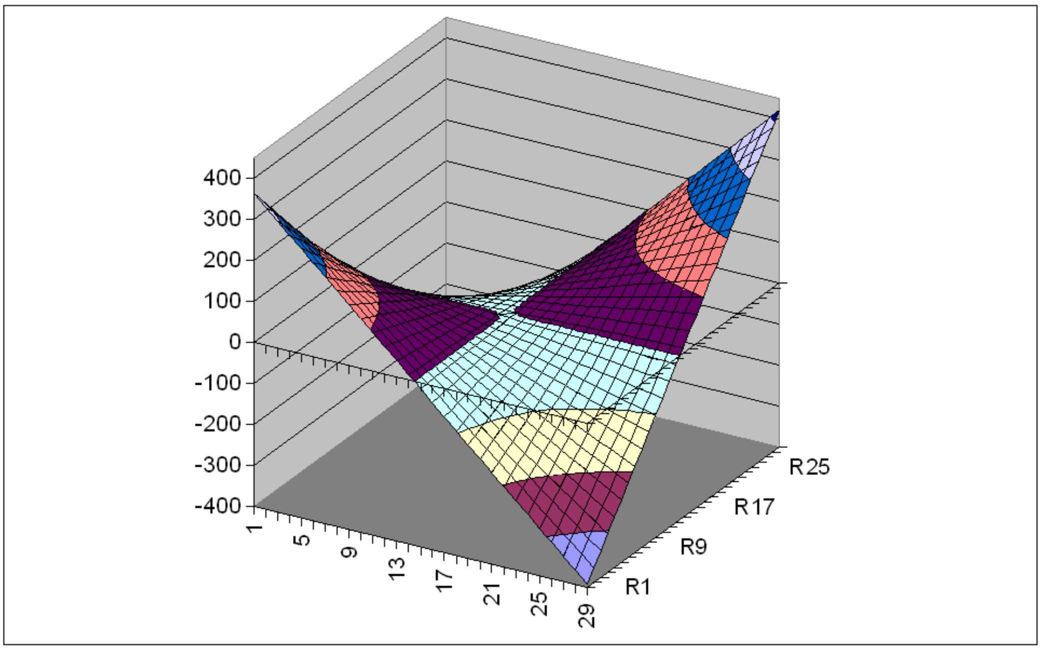
$m(x,y) = 2x^2 + 2x(y+1) + y$ mit $k = x + y$, $l = x$

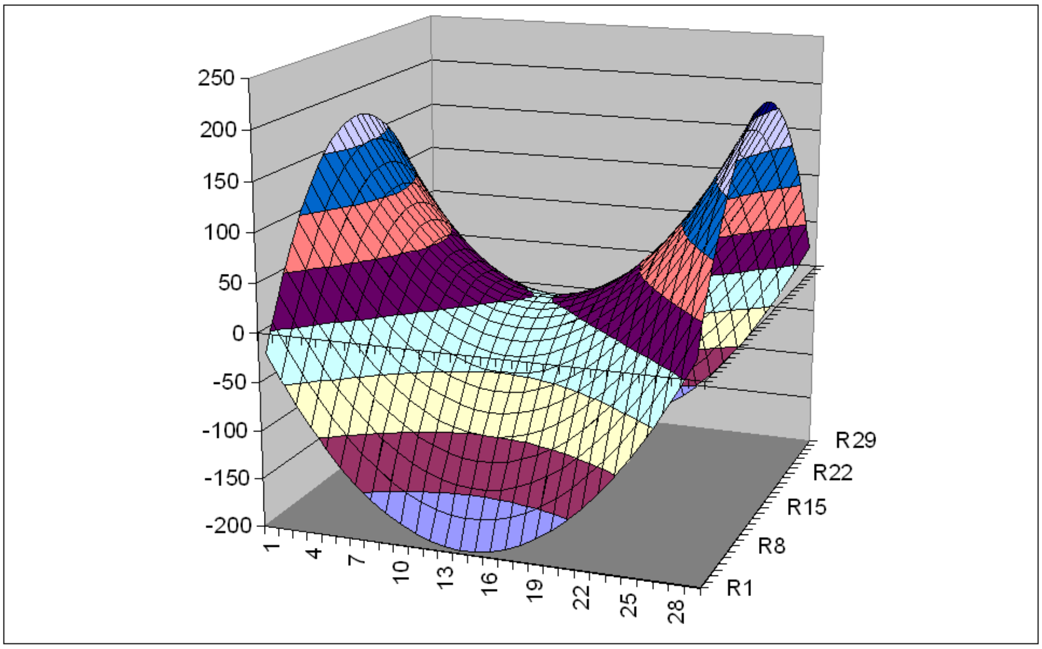
$m(k,l) = m(k,k+n) = 2k^2 + 2k + n(2k+1)$ mit $l = k + n$

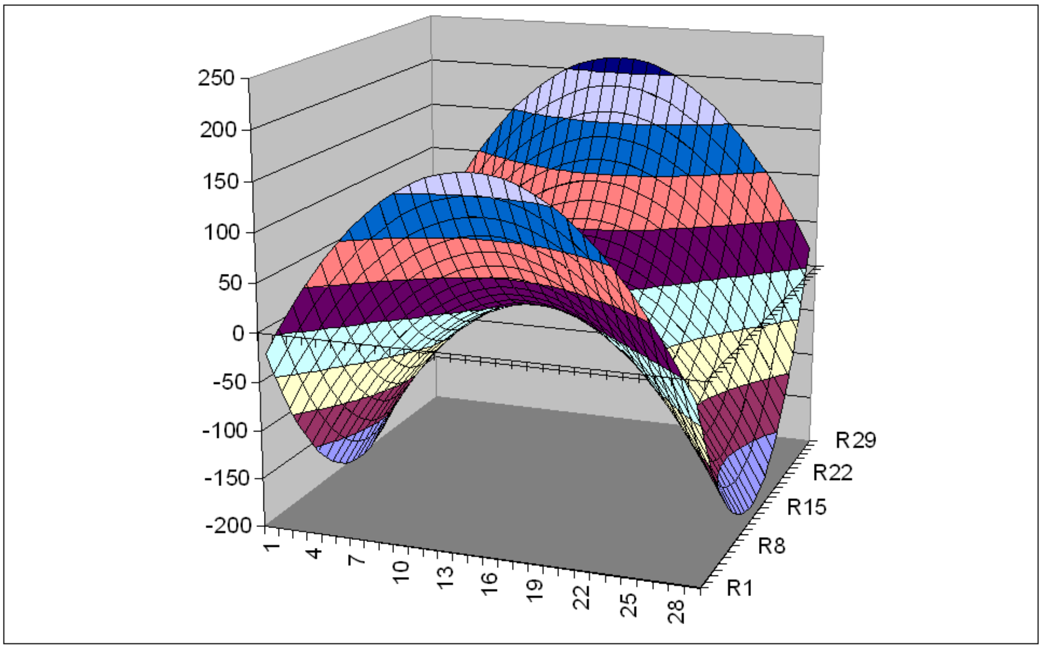
$m(k,k) = 2k^2 + 2k$

Gedrehte Flächen (+/- 45°):

$m = \sqrt{(2)}x + x^2 - y^2$ mit $x = k/\sqrt{(2)}$, $y = l/\sqrt{(2)}$ oder umgekehrt…







250
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
1
4
7
10
13
16
19
22
25
28
R1
R8
R15
R22
R29